ГОУ ВО Московской области
«Государственный гуманитарно-технологический университет»
Промышленно-экономический колледж

Конспект урока математики

«КВАНТОРЫ»

«Для любого допустимого x утверждение $\mathrm{P}(x)$ истинно»:

квантор $\forall x\,\mathrm{P}(x)$ высказывание

Квантор – знак, обозначающий количество.

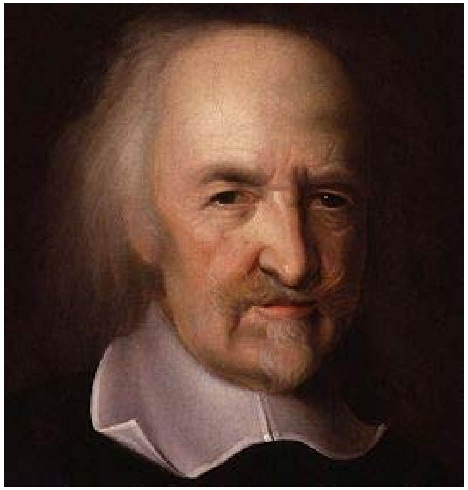
$\forall = \mathrm{A}$ (*all* – все) $\exists = \mathrm{E}$ (*exists* – существует)

Автор: Савинова Лариса Николаевна,
преподаватель математических дисциплин ПЭК ГГТУ,
г.о. Орехово-Зуево, Московская область, РФ

Цели и задачи урока:

- ввести понятие квантора;
- рассмотреть кванторы общности и существования, их обозначение и количественные связки;
- научиться решать примеры с использованием кванторов;
- развивать математическое мышление обучающихся и побуждать их к преодолению трудностей в процессе умственной деятельности;
- формировать культуру устной математической речи, чувство самоконтроля.

Кванторы



Философы давно обращали внимание на логические операции, ограничивающие область истинности предиката, однако не выделяли их в отдельный класс операций. Так, **Томас Гоббс** считал, что они являются частями имен.

Хотя кванторно-логические конструкции широко используются как в научной, так и в обыденной речи, их формализация произошла только в 1879 г., в книге **Фридриха Фреге** «Исчисление понятий». Обозначения Фреге имели вид громоздких графических конструкций и не были приняты. Утверждение о «сводимости математики к логике».

Впоследствии было предложено множество более удачных символов, но общепринятыми стали обозначения ∃ для квантора существования (перевёрнутая первая буква *Exists* — существует), предложенное **Чарльзом Пирсом** в 1885г., и ∀ для квантора общности (от *Alle* — «все», «всякий»), образованное **Герхардом Генценом** в 1935 г. по аналогии с символом квантора существования (немецкий математик и логик, внёс большой вклад в исследование оснований математики и развитие теории доказательств, создатель исчисления секвенций).

Пирс также предложил термины «квантор», «квантификация».

КВАНТОРЫ

В математической логике наряду с логическими операциями используются и кванторы. Квантор (от лат. *quantum* — сколько) — логическая операция, дающая количественную характеристику области предметов, к которой относится выражение, получаемое в результате ее применения.

В обычном языке носителями таких характеристик служат слова типа все, каждый, некоторый, любой, всякий, бесконечно много, существует, имеется, единственный, несколько, конечное число, а также все количественные числительные. В формализованных языках, составной частью которых является исчисление предикатов, для выражения всех подобных характеристик оказывается достаточным кванторов двух видов: квантора общности и квантора существования.

Предикаты задают **множества:**

$$P(x) = (x > 0)$$

$$P(x, y) = (x + y = 1)$$

Предикаты, которые **всегда истинны**:

$P(x) = (x^2 \geq 0)$ для всех вещественных чисел

«Для любого допустимого x утверждение P(x) истинно»:

квантор

$$\forall x \, P(x)$$

высказывание

Квантор – знак, обозначающий количество.

$\forall = \mathrm{A}$ (*all* – все) $\exists = \mathrm{E}$ (*exists* – существует)

Кванто́р — общее название для логических операций, ограничивающих область истинности какого-либо предиката и создающих высказывание.

Название квантора	Количественные связки (как читается)	Обозначение
Квантор общности	«для всех…», «для каждого…» или «каждый», «для любого» или «любой…», «всякий», бесконечно много	$\forall x\ P(x)$
Квантор существования	«существует» или «найдется», имеется, единственный, несколько, конечное число	$\exists x\ P(x)$

Пример 1.

Пусть предикат $P(x)$: «x кратно 7».

С помощью квантора всеобщности можно записать следующие ложные высказывания:

- любое натуральное число делится на 7;
- каждое натуральное число делится на 7;
- все натуральные числа делятся на 7;

который будет иметь вид: $(\forall x \in N)P(x)$.

Для записи истинных высказываний используем квантор существования:

- существуют натуральные числа, которые делятся на 7;
- найдётся натуральное число, которое делится на 7;
- хотя бы одно натуральное число делится на 7.

Запись будет иметь вид: $(\exists x \in N)P(x)$.

Пример 2.

Пусть на множестве x простых чисел задан предикат : «Простое число является нечетным».

Поставив перед предикатом слово «любое», получим ложное высказывание:

«Любое простое число является нечетным» (например, 2 является простым четным числом).

Поставим перед предикатом слово «существует» и получим истинное высказывание:

«Существует простое число, которое является нечетным» (например, x=3).

Таким образом, предикат можно превратить в высказывание, если поставить перед предикатом квантор.

Пример 3.

Какой квантор использовать?

« $\forall$ моря соленые».

« $\exists$ кошки серые».

« $\exists$ числа чётные».

« $\forall$ окуни – рыбы».

« $\exists$ прямоугольники – квадраты».

« $\forall$ квадраты – прямоугольники».

Истинно ли высказывание?

$\cancel{\forall x\, \mathrm{P}(x) \text{ при } \mathrm{P}(x) = (x > 0)}$

✓ $\exists x\, \mathrm{P}(x)$ при $\mathrm{P}(x) = (x > 0)$

✓ $\forall x\, \mathrm{P}(x)$ при $\mathrm{P}(x) = (x^2 \geq 0)$

✓ $\exists x\, \mathrm{P}(x)$ при $\mathrm{P}(x) = (x^2 \geq 0)$

Пример 4.

Записать в виде предикатов с кванторами следующие высказывания:

"Все студенты сдают экзамены",

"Некоторые студенты сдают экзамены на отлично".

Решение.

Введем предикаты:

P – «сдавать экзамены»

Q – «сдавать экзамены на отлично».

Предметная область данных предикатов представляет собой множество студентов.

Тогда исходные выражения примут вид:

$$(\forall x)\,\mathbf{P}(x)$$

$$(\exists x)\,\mathbf{Q}(x)$$

*Часть формулы, на которую распространяется действие квантора, называется **областью действия** этого квантора.*

Вхождение переменной в формулу может быть **связанным**, если переменная расположена либо непосредственно после знака квантора, либо в области действий квантора, после которого стоит переменная. Все прочие вхождения — свободные.

Например, в выражении $\forall x\, P(x)$ переменная x связывает свойство предиката и квантор общности. Грубо говоря, от этой переменной, ее конкретного вида и имени, ничего не зависит, т.е. $\forall x\, P(x)$ и $\forall y\, P(y)$ суть одно и то же.

Так, можно произвольно называть индекс суммирования в рядах и переменную интегрирования в определенных интегралах.

В частности, в определении множества как совокупности всех объектов, удовлетворяющих характеристическому свойству, использовалась запись $G = \{x|P(x)\}$.

Очевидно, что в предикате со связанной переменной ее так же легко можно заменить на любую другую. При этом множество все равно будет совокупностью тех же элементов, удовлетворяющих свойству P.

Переменная, не являющаяся связанной, называется ***свободной****, если после подстановки вместо нее имени некоторых конкретных объектов предикат превращается в осмысленное предложение*.

Кванторы общности и существования

Используются для логической характеристики ***всего поля*** предиката.

При навешивании ***квантора общности*** на предикат $P(x)$ с полем M получаем высказывание "для любого x из поля M верно $P(x)$".

Это высказывание обозначается

$$\underset{M}{\forall} x\, P(x) \qquad \text{или} \qquad \forall x\, P(x)$$

Оно истинно, если при подстановке ***любого*** значения x из поля М в предикат $P(x)$ он становится истинным высказыванием, и ложно в противном случае.

Пример. $P(x)$ – «$x < 6$»; M=**R** – множество действительных чисел.

$$\underset{\mathrm{R}}{\forall} x \;\; x < 6 \text{ – ложное высказывание}$$

Квантор общности – аналог операции конъюнкции.

$$M = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \Rightarrow \underset{M}{\forall} x\, P(x) \Leftrightarrow P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge ... \wedge P(x_n)$$

Кванторы общности и существования

При навешивании ***квантора существования*** на предикат $P(x)$ с полем M получаем высказывание "существует x из поля M для которого верно $P(x)$". Это высказывание обозначается:

$$\exists_M x\, P(x) \qquad \text{или} \qquad \exists x\, P(x)$$

Оно истинно, если при подстановке ***хотя бы одного*** значения x из поля М в предикат $P(x)$ он становится истинным высказыванием, и ложно в противном случае.

Пример. $P(x)$ – «$x < 1$»; M=**N** – множество натуральных чисел.

$\exists_{\mathrm{N}} x\ \ x < 1$ – ложное высказывание

Квантор существования – аналог операции дизъюнкции.

$$M = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \Rightarrow \exists_M x\, P(x) \Leftrightarrow P(x_1) \vee P(x_2) \vee ... \vee P(x_n)$$

Связь между кванторами общности и существования

Поскольку кванторы общности и существования являются обобщением операций конъюнкции и дизъюнкции, между ними существует связь, аналогичная законам Моргана.

$$\overline{a \vee b} \Leftrightarrow \bar{a} \wedge \bar{b} \qquad \boxed{\overline{\exists x\, P(x)} \Leftrightarrow \forall x\, \overline{P(x)}}$$

$$\overline{a \wedge b} \Leftrightarrow \bar{a} \vee \bar{b} \qquad \overline{\forall x\, P(x)} \Leftrightarrow \exists x\, \overline{P(x)}$$

Пример. $\overline{\forall x\; x < 6} \Leftrightarrow \exists x\;\; x \geq 6;\qquad \overline{\exists x\; x < 6} \Leftrightarrow \forall x\;\; x \geq 6$

К предикатам можно применять те же логические операции, что и к высказываниям. Поля предикатов при этом должны совпадать. В результате этих операций получаются новые, ***сложные*** предикаты.

В двухместных предикатах можно навешивать кванторы на обе переменные (результат – высказывание) или одну из них. (результат – одноместный предикат относительно другой переменной).

$$\forall x \forall y\, P(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y\, P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y\, P(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y\, P(x, y)$$

Пример 5. Запишем с помощью формул логики предикатов следующее утверждение: «Для лечения любого известного компьютерного вируса имеются программы. Существуют новые (неизвестные) компьютерные вирусы, для лечения которых программы еще не разработаны».

Введем обозначения элементарных формул:

$A(x)$ — известен компьютерный вирус x;

$B(x)$ — для лечения вируса x существует программа.

Тогда с помощью логических связок и кванторов получим формулы:

$\overline{B}(x)$ — против вируса x нет программы;

$\forall x(A(x))$ — любой вирус известен;

$\exists x(\overline{A}(x))$ — существуют новые (неизвестные) вирусы;

$\forall x(A(x) \to B(x))$ — если вирус давно известен, то имеется программа для его лечения;

$\exists x(\overline{A}(x) \wedge \overline{B}(x))$ — существуют (появились) новые вирусы, для лечения которых программы еще не разработаны.

Тогда формализованное исходное утверждение примет вид

$$(\forall x(A(x) \to B(x))) \wedge (\exists x(\overline{A}(x) \wedge \overline{B}(x))).$$

В эту формулу входит лишь связанная переменная x, а, например, в формуле $A(x_1, x_2) \to \forall x_1 B(x_1)$ первое включение переменной x_1 свободное, а второе — связанное.

Отношения следования и равносильности между высказывательными формами связаны с тождественно-истинными импликацией и эквиваленцией, следовательно, их можно записать с помощью квантора общности:

$$Q_1(x) \Rightarrow Q_2(x) \text{ тождественно } \forall x(Q_1(x) \rightarrow Q_2(x));$$
$$Q_1(x) \Leftrightarrow Q_2(x) \text{ тождественно } \forall x(Q_1(x) \equiv Q_2(x)).$$

Например, запись $x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0$ является не формулой, а истинным высказыванием о равносильности двух формул, представленных в виде уравнений. В то же время справедлива запись

$$\forall x \in R\ (x^2 - 5x = 0) \equiv (x(x-5) = 0),$$

выражающая истинное высказывание, которое включает операцию эквиваленции в качестве составляющей.

Поэтому логическое следование можно определить через импликацию, а равносильность через эквиваленцию. Так, для эквиваленции справедливо: «Две высказывательные формы Q_1 и Q_2 истинны или ложны ($Q_1 \Leftrightarrow Q_2$) одновременно с высказыванием $\forall x\big(Q_1(x) \equiv Q_2(x)\big)$» , что и было ранее введено.

Итак, существует различие в употреблении знаков «$\Longrightarrow$» и «$\rightarrow$», «$\Leftrightarrow$» и «$\equiv$». Как известно, знаки «$\rightarrow$», «$\leftrightarrow$» обозначают логические операции импликации и равносильности и входят составной частью в формулы.

Знаки «$\Longrightarrow$» и «$\Leftrightarrow$» обозначают определенные отношения между высказывательными формами, не входя в них в качестве составной части.